可換 Banach 環上の双加群とC$\ast$-環(可換Banach環と種々の分野との交流)

綿谷, 安男

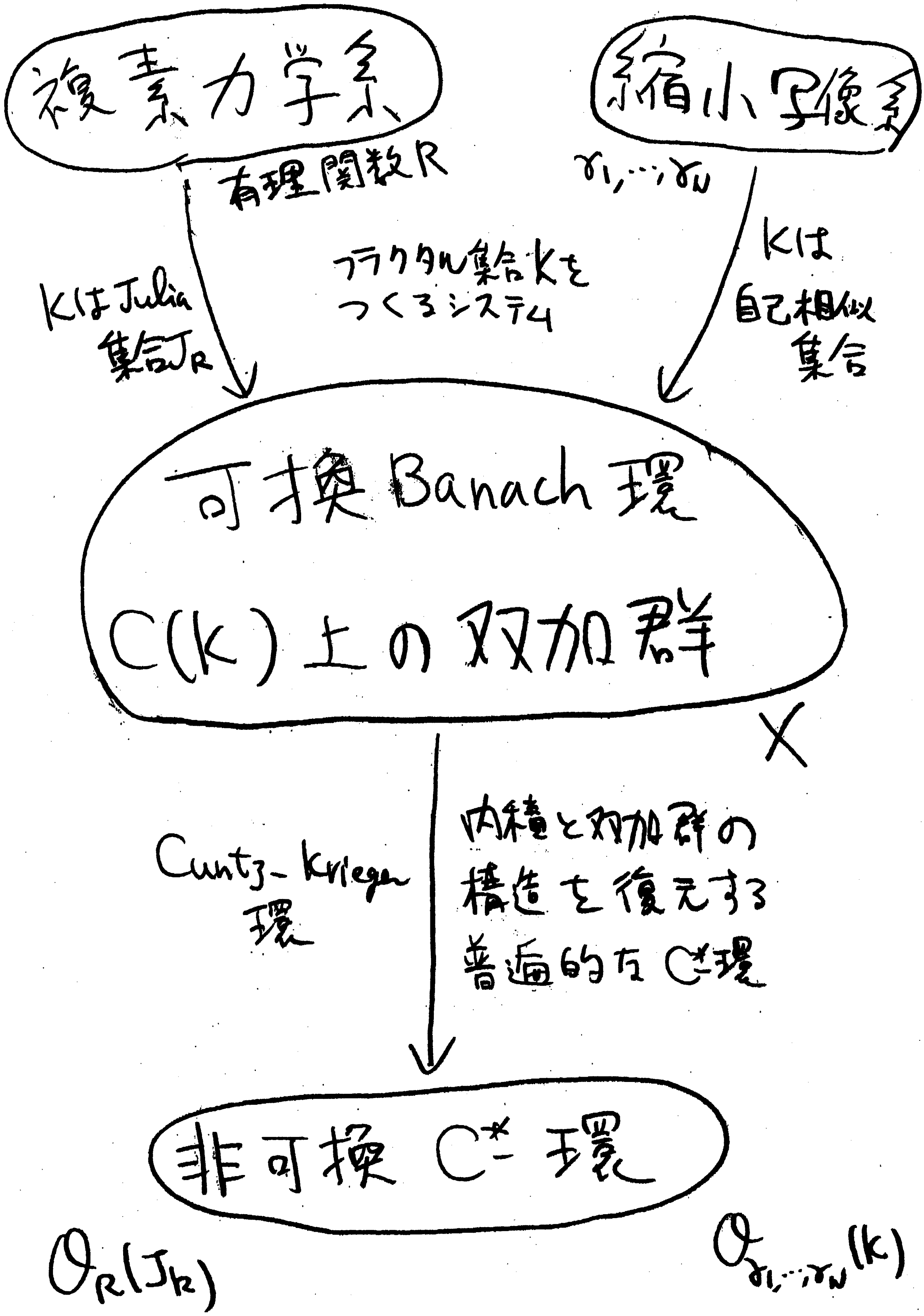
数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 133-141

可換Banach環上の双加群とC*-環

九州大学大学院数理学研究院　綿谷安男
(Kyushu University　Watatani, Yasuo)

0 はじめに

可換Banach環Aそのものを非可換なC*-環と関連づけるのは少し無理がありそうな気がする。しかしここではそこであきらめないで、可換Banach環A上の双加群Xを考えると、そのXには非可換なC*-環$\mathcal{O}_X$が対応できるだけでなく、Xの「幾何学的構造」がC*-環の「環論的構造」に反映できることを考察する。この意味で可換Banach環Aだけでなくその上の加群構造も考えると、さらに豊かな世界が開かれているといえよう。


複素力学系
縮小写像系
有理関数R
$\gamma_1,\cdots,\gamma_N$
KはJulia集合J_R
フラクタル集合Kをつくるシステム
Kは自己相似集合
可換Banach環
C(K)上の双加群
X
Cuntz-Krieger環
内積と双加群の構造を復元する普遍的なC*環
非可換C*環
$\mathcal{O}_R(J_R)$
$\mathcal{O}_{\gamma_1,\cdots,\gamma_N}(K)$

① ヒルベルト空間の場合

最も簡単と思われる場合をまず考えよう。

可換Banach環 A として $A=\mathbb{C}$ とする。A 上の双加群として $X=\mathbb{C}^n$ とおく。

$a, b \in A$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$ に対し

双加群構造 $a\cdot(x_1,\cdots,x_n)\cdot b=(ax_1b,\cdots,ax_nb)$

だけでなく

内積構造 $(x|y)=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\,y_i$

も考えよう。

この X から C^*-環 $\mathcal{O}_X$ をつくろう。要請として C^*-環 $\mathcal{O}_X$ の積構造が、元の X の双加群と内積構造を「復元」するようにしたい。$A=\mathbb{C}$ なので双加群構造は $\mathcal{O}_X$ のベクトル空間の構造でそのままでよい。後は内積構造を復元すればよい。つまり $\{S_x \mid x\in X\}\subset\mathcal{O}_X$ と X の元でラベル付けされた生成元 S_x と $A=\mathbb{C}I\subset\mathcal{O}_X$ が

$$\boxed{S_x^{\,*}S_y=(x|y)\cdot I}$$

をみたすようなものの中で一番universalなもので、"reduced"された C^*-環 $\mathcal{O}_X$ は、実はCuntz環 $\mathcal{O}_n$ と同型になる。

Def Cuntz環 $\mathcal{O}_n$ とは n コの生成元 $S_1, \dots, S_n$ をもち、

交換関係

$$\begin{cases} S_i^* S_i = I & (i=1,\dots,n) \text{ つまり isometries} \\ \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I, & (\text{各 } S_i \text{ の値域は互いに直交して全体を張る}) \end{cases}$$

をみたす C^*-環である[C]。Cuntz環は生成元のとり方によらずすべて同型である。つまり他に n コの生成元 $T_1, \dots, T_n$ から生成される C^*-alg $B = C^*(T_1, \dots, T_n)$ で同じ交換関係

$$\begin{cases} T_i^* T_i = I & (i=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = I \end{cases}$$

をみたすものがあるとせよ。するとある $\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow B$ という同型写像で $\varphi(S_i) = T_i$ となるものが存在する。この意味で同型を除いて Cuntz環 $\mathcal{O}_n$ は一意に定まる。Cuntz $\mathcal{O}_n$ は単純でそのK-群 $K_0(\mathcal{O}_n)$ は $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ になり生成元の個数を覚えている。

さて $X = \mathbb{C}^n$ の場合の $\mathcal{O}_X$ は自然に $\mathcal{O}_n$ と同型になる:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ に対し

$$\boxed{S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i S_i}$$

実際 $\mathrm{Im}\, S_i \perp \mathrm{Im}\, S_j$ $(i \neq j)$ より $S_i^* S_j = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
S_x^* S_y &= \left(\sum_{i=1}^n x_i S_i\right)^* \left(\sum_{j=1}^n y_j S_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i}\, y_j\, S_i^* S_j \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\, y_i\, S_i^* S_i \\
&= (x|y) \cdot I
\end{aligned}
$$

とうまくなっている。

問題 $A = \mathbb{C}$ とする。$X = \mathbb{C}^n$ をヒルベルト空間とする代わりに一般の Banach space にするとどうなるか？

ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^n$: バナッハ空間

$=$ Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$: $\mathcal{B}$

となる Banach 環 $\mathcal{B}$ とは何か？ 今のところこの比例式を成立させるようなうまい Banach 環 (もしくは C^*-環か) $\mathcal{B}$ のつくり方はわからない。しかし一番美しいヒルベルト空間の場合に非常によい C^*-環である Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ が対応するので，一般のバナッハ空間の場合にも何かよいものが隠れていると期待している。

2 Cuntz–Pimsner 環

Def C^*環 A 上のヒルベルト双加群 X とは、
X がベクトル空間でありかつ A-A 双加群であり
さらに C^*環 A 値の内積 $(\ |\ )_A$ が X 上にあり、
ノルム $\|x\| = \|(x|x)_A\|^{1/2}$ で X が完備でさらに
A の左作用が $*$homo $\phi: A \to \mathcal{L}(X)$ を導くものである。

Def この X 上の "rank one" operator $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X)$
を $\theta_{x,y}(z) = x(y|z)_A \quad ,(x, y, z \in X)$ できめる。

$K(X) \underset{\text{おく}}{=} \overline{\{\theta_{x,y} \text{の有限和} \mid x, y \in X\}} \triangleleft \mathcal{L}(X)$

Def C^*環 A 上のヒルベルト双加群 X に対する
Cuntz–Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ とは

生成元 ： $\{a \mid a \in A\} \cup \{S_x \mid x \in X\}$

交換関係：

$$\begin{cases} aS_x = S_{a\cdot x} \\ S_x a = S_{x\cdot a} \\ S_x^* S_y = (x|y)_A \\ a = i_K\,\phi(a) \end{cases}$$

ここで
$i_K : K(X) \to \mathcal{O}_X$ は
$i_K(\theta_{x,y}) = S_x S_y^*$

$(a \in A,\ x \in X,\ y \in X)$

をもつ普遍的な C^*環である [P]。

3 複素力学系からつくられる C^*環

有理関数 R をリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の変換 $R : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ とみる。R の反復合成 R^n からつくられる複素力学系 $(R^n)_n$ を考える。$J_R \subset \hat{\mathbb{C}}$ を R の Julia 集合とする。可換 C^*環 $A = C(J_R)$ 上のヒルベルト双加群 X を次のように構成する。

$$X \underset{おく}{=} C(\{(x, y) \in J_R^2 \mid y = R(x)\})$$

$a, b \in A$, $f, g \in X$ に対し

$$\begin{cases} (a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y) \\ (f|g)_A(y) = \sum_{x \in R^{-1}(y)} e_x \overline{f(x, y)} g(x, y) \end{cases}$$

ここで e_x は x での R の分岐指数

Def この双加群 X からつくられた Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_R(J_R)$ とかき、有理関数 R に付随する C^*環という。

Theorem (梶原-W) [KW1]
有理関数 R の次数が 2 以上ならば、C^*環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ は真無限単純 C^*環になる。

(注) Julia 集合 J_R のフラクタル性を可換 Banach 環 $A = C(J_R)$ とその上の双加群 X で表わされ、それが C^*環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ の環論的構造に反映したといえる。

④ 縮小写像系からつくられる C^*環

完備距離空間 Ω 上の真の縮小写像の系
$\gamma_1, \cdots, \gamma_n : \Omega \to \Omega$ に対し, Ω の空でないコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ で次の自己相似性をみたすものが唯1つ存在する。(フラクタル図形 K をつくる1つの方法)

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k(K)$$

可換 C^*-環 $A = C(K)$ 上のヒルベルト双加群 X を構成する

$$X \underset{\text{おく}}{=} C\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{ (\gamma_k(y), y) \in K^2 \mid y \in K \} \right)$$

$a, b \in A$, $f, g \in X$ に対し

$$(a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y)$$

$$(f|g)_A(y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(\gamma_k(y), y)}\, g(\gamma_k(y), y)$$

Def この双加群 X からつくられた Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_{\gamma_1, \cdots, \gamma_n}(K)$ とかき, 縮小写像系に付随する C^*環という。

Theorem (梶原-W) [KW2]
もし縮小写像系 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ が開写像条件をみたすとする。つまりある開集合 $\mathcal{O} \subset K$ で $\bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ となるものがあるとする。$n \geq 2$ とするならば C^*環 $\mathcal{O}_{\gamma_1, \cdots, \gamma_n}(K)$ は真無限単純 C^*環になる。

注 自己相似集合 K のフラクタル性が可換Banach環 $C(K)$ 上の双加群を通じて C^*環 $\mathcal{O}_{\gamma_1, \cdots, \gamma_n}(K)$ に反映したといえる。

《References》

[C] J. Cuntz, Simple C*-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173–185.

[KW1] T. Kajiwara and Y. Watatani, C*-algebras associated with complex dynamical systems, Indiana. Math. J. (2005), 755–778

[KW2] T. Kajiwara and Y. Watatani, C*-algebras associated with self-similar sets, to appear J. Operator Theory.

[P] M. Pimsner, A class of C*-algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed product by Z, free probability theory, AMS. (1997), 189–212.